

**Федеральное государственное автономное образовательное
учреждение высшего образования
«Московский физико-технический институт
(национальный исследовательский университет)»**

УТВЕРЖДЕНО
Директор Высшей школы
современной математики
А.Н. Соболевский

	Рабочая программа дисциплины (модуля)
по дисциплине:	Алгебраическая геометрия
по направлению:	Математика
профиль подготовки:	Фундаментальная математика
	Высшая школа современной математики
	Высшая школа современной математики
курс:	2
квалификация:	бакалавр

Семестр, формы промежуточной аттестации: 4 (весенний) - Экзамен

Аудиторных часов: 90 всего, в том числе:

лекции: 30 час.

семинары: 60 час.

лабораторные занятия: 0 час.

Самостоятельная работа: 96 час.

Подготовка к экзамену: 30 час.

Всего часов: 216, всего зач. ед.: 6

Программу составил: М.А. Цфасман, д-р физ.-мат. наук

Программа обсуждена на заседании Высшая школа современной математики 02.09.2024

Аннотация

Современная математика немыслима без алгебраической геометрии, прогресс которой в 20 и 21 веке сделал ее одной из основных математических дисциплин. Цель курса – ознакомить студентов с базовыми понятиями и основными результатами классической алгебраической геометрии, вводя только те современные технические понятия и методы, которые для этого строго необходимы. Основное внимание уделяется теории алгебраических кривых. В качестве базы даются понятия аффинных и проективных многообразий, их морфизмов, алгебры функций, дифференциальных форм, дивизоров, элементы теории расслоений и пучков. Подробно разбирается геометрия кривых малых родов. Курс доводится до многообразий Пикара, пространств модулей кривых и векторных расслоений, дзета-функции кривой над конечным полем. Теория поверхностей и многомерных многообразий изучается в последующих более продвинутых курсах алгебраической геометрии.

1. Цели и задачи

Цель дисциплины

Формирование базовых знаний по алгебраической геометрии для дальнейшего использования в других математических дисциплинах; формирование математической культуры, исследовательских навыков и способности применять знания на практике.

Задачи дисциплины

- приобретение слушателями теоретических знаний и практических умений и навыков в области алгебраической геометрии (в частности, теории алгебраических кривых);
- подготовка слушателей к изучению смежных математических дисциплин;
- приобретение навыков в применении алгебраико-геометрических методов в других математических дисциплинах.

2. Перечень формируемых компетенций

Освоение дисциплины направлено на формирование следующих компетенций:

Код и наименование компетенции	Индикаторы достижения компетенции
УК-1 Способен осуществлять поиск, критический анализ и синтез информации, применять системный подход для решения поставленных задач	УК-1.1 Анализирует задачу, выделяя этапы ее решения, действия по решению задачи
	УК-1.2 Находит, критически анализирует и выбирает информацию, необходимую для решения поставленной задачи
	УК-1.3 Рассматривает различные варианты решения задачи, оценивает их преимущества и недостатки
	УК-1.4 Грамотно, логично, аргументированно формирует собственные суждения и оценки
ОПК-1 Способен применять фундаментальные знания, полученные в области математических и (или) естественных наук, и использовать их в профессиональной деятельности	ОПК-1.1 Способен анализировать поставленную задачу, намечать пути ее решения
	ОПК-1.2 Способен строить математические модели, производить количественные расчеты и оценки
	ОПК-1.3 Способен определять границы применимости полученных результатов
ПК-1 Способен ставить, формализовывать и решать задачи, в том числе разрабатывать и исследовать математические модели изучаемых явлений и процессов, системно анализировать научные проблемы, получать новые научные результаты	ПК-1.1 Способен находить, анализировать и обобщать информацию об актуальных результатах исследований в рамках тематической области своей профессиональной деятельности
	ПК-1.2 Способен выдвигать гипотезы, строить математические модели для описания изучаемых явлений и процессов, оценивать качество разработанной модели
	ПК-1.3 Способен применять теоретические и (или) экспериментальные методы исследований к конкретной научной задаче и интерпретировать полученные результаты

ПК-3 Способен проверять корректность математического доказательства, строить логически последовательные цепочки рассуждений	ПК-3.1 Способен к формальной записи рассуждения в терминах логики предикатов
	ПК-3.2 Владеет понятием о математически строгом доказательстве, способен различать строгие и нестрогие рассуждения
	ПК-3.3 Способен выявлять использованные при доказательстве предположения и предпосылки, в том числе неявные, и контролировать их корректность

3. Перечень планируемых результатов обучения по дисциплине (модулю)

В результате освоения дисциплины обучающиеся должны

знать:

Основные понятия классической алгебраической геометрии и, более детально, теории алгебраических кривых.

уметь:

Разбирать конкретные примеры и проводить необходимые вычисления.

владеть:

Свободно владеть техническим инструментарием, необходимым для самостоятельной работы с алгебраическими кривыми.

4. Содержание дисциплины (модуля), структурированное по темам (разделам) с указанием отведенного на них количества академических часов и видов учебных занятий

4.1. Разделы дисциплины (модуля) и трудоемкости по видам учебных занятий

№	Тема (раздел) дисциплины	Трудоемкость по видам учебных занятий, включая самостоятельную работу, час.			
		Лекции	Семинары	Лаборат. работы	Самост. работа
1	Аффинные и проективные многообразия.	2	4		8
2	Морфизмы многообразий.	2	4		4
3	Проективные многообразия.	2	4		4
4	Дивизоры, линейная эквивалентность, обратимые пучки.	2	4		4
5	Векторные расслоения и дифференциалы.	2	4		4
6	Коники, эллиптические кривые.	2	4		4
7	Род кривых.	2	4		8
8	Теорема Римана-Роха.	2	4		8
9	Канонический класс.	2	4		8
10	Многообразие Пикара.	2	4		8
11	Гиперэллиптические кривые.	2	4		8
12	Дзета-функция кривой над конечным полем.	2	4		8
13	Классификация кривых.	2	4		8
14	Пространство модулей кривых.	2	4		8
15	Векторные расслоения на кривых.	2	4		4
Итого часов		30	60		96
Подготовка к экзамену		30 час.			
Общая трудоёмкость		216 час., 6 зач.ед.			

4.2. Содержание дисциплины (модуля), структурированное по темам (разделам)

Семестр: 4 (Весенний)

1. Аффинные и проективные многообразия.

Аффинные и проективные многообразия: определения и примеры.
Топология Зарисского и структурный пучок

2. Морфизмы многообразий.

Морфизмы аффинных многообразий.
Морфизмы проективных многообразий, трудности определения.
Рациональные отображения и бирациональные изоморфизмы. Примеры

3. Проективные многообразия.

Проективные многообразия.
Степень проективного многообразия, определение и теорема существования

4. Дивизоры, линейная эквивалентность, обратимые пучки.

Группа Пикара.
Группа Пикара проективного пространства.
Касательное расслоение к гладкому многообразию.
Векторные расслоения

5. Векторные расслоения и дифференциалы.

Векторные расслоения и локально свободные пучки.
Дифференциалы на гладком многообразии.
Канонический класс

6. Коники, эллиптические кривые.

Рациональность коник и особых плоских кубик.
Групповой закон на гладкой плоской кубике.
Эллиптические кривые.
Нерациональность эллиптических кривых

7. Род кривых.

Индекс пересечения кривых на поверхности.
Теорема Безу.
Определение Римана рода алгебраической кривой.
Арифметический род гладкой кривой

8. Теорема Римана-Роха.

Группа Пикара кривой.
Линейные системы на эллиптической кривой - подробный анализ.
Теорема Римана-Роха: доказательство при помощи теории пучков и классическое геометрическое доказательство

9. Канонический класс.

Канонический класс и формула Гурвица. Алгебраическое доказательство.
Вычеты на кривых и двойственность Серра, набросок доказательства

10. Многообразие Пикара.

Многообразие Пикара (без доказательства).
Морфизм из симметричной степени кривой

11. Гиперэллиптические кривые.

Каноническое вложение кривой.
Гиперэллиптические кривые.
Гиперэллиптичность кривых рода 2.
Кривые рода 3 и 4, их канонические вложения

12. Дзета-функция кривой над конечным полем.

Дзета-функция кривой над конечным полем.
Примеры.
Гипотеза Вейля (без доказательства)

13. Классификация кривых.

Классификация кривых родов 3 и 4.
Кривые рода 5 и трисекущие

14. Пространство модулей кривых.

Грубое и тонкое пространство модулей
Свойства и существование грубого пространства модулей, идея конструкции.

15. Векторные расслоения на кривых.

Векторные расслоения на кривых
Модули векторных расслоений, идея конструкции и пример

5. Описание материально-технической базы, необходимой для осуществления образовательного процесса по дисциплине (модулю)

Учебная аудитория, оснащенная мультимедиа проектором, экраном и микрофоном.

6. Перечень рекомендуемой литературы

Основная литература

1. Основы алгебраической геометрии, [учеб. пособие для вузов] /И. Р. Шафаревич. Москва, МЦНМО, 2018

Дополнительная литература

1. Алгебраическая геометрия для всех [Текст] = Undergraduate algebraic geometry/М. Рид, -М., Мир, 1991

7. Перечень ресурсов информационно-телекоммуникационной сети "Интернет", необходимых для освоения дисциплины (модуля)

<https://old.mccme.ru/iium/courses.php>

8. Перечень информационных технологий, используемых при осуществлении образовательного процесса по дисциплине (модулю), включая перечень необходимого программного обеспечения и информационных справочных систем (при необходимости)

На лекционных и практических (семинарских) занятиях могут использоваться мультимедийные технологии, включая демонстрацию презентаций, а также технологии дистанционной аудиовидеоконференцсвязи.

9. Методические указания для обучающихся по освоению дисциплины (модуля)

Методические указания приводятся в разрабатываемых аудиторных и домашних раздаточных материалах (листочках).

ОЦЕНОЧНЫЕ МАТЕРИАЛЫ ПО ДИСЦИПЛИНЕ (МОДУЛЮ)

по направлению: Математика
профиль подготовки: Фундаментальная математика
Высшая школа современной математики
Высшая школа современной математики
курс: 2
квалификация: бакалавр

Семестр, формы промежуточной аттестации: 4 (весенний) - Экзамен

Разработчик: М.А. Цфасман, д-р физ.-мат. наук

1. Компетенции, формируемые в процессе изучения дисциплины

Код и наименование компетенции	Индикаторы достижения компетенции
УК-1 Способен осуществлять поиск, критический анализ и синтез информации, применять системный подход для решения поставленных задач	УК-1.1 Анализирует задачу, выделяя этапы ее решения, действия по решению задачи
	УК-1.2 Находит, критически анализирует и выбирает информацию, необходимую для решения поставленной задачи
	УК-1.3 Рассматривает различные варианты решения задачи, оценивает их преимущества и недостатки
	УК-1.4 Грамотно, логично, аргументированно формирует собственные суждения и оценки
ОПК-1 Способен применять фундаментальные знания, полученные в области математических и (или) естественных наук, и использовать их в профессиональной деятельности	ОПК-1.1 Способен анализировать поставленную задачу, намечать пути ее решения
	ОПК-1.2 Способен строить математические модели, производить количественные расчеты и оценки
	ОПК-1.3 Способен определять границы применимости полученных результатов
ПК-1 Способен ставить, формализовывать и решать задачи, в том числе разрабатывать и исследовать математические модели изучаемых явлений и процессов, системно анализировать научные проблемы, получать новые научные результаты	ПК-1.1 Способен находить, анализировать и обобщать информацию об актуальных результатах исследований в рамках тематической области своей профессиональной деятельности
	ПК-1.2 Способен выдвигать гипотезы, строить математические модели для описания изучаемых явлений и процессов, оценивать качество разработанной модели
	ПК-1.3 Способен применять теоретические и (или) экспериментальные методы исследований к конкретной научной задаче и интерпретировать полученные результаты
ПК-3 Способен проверять корректность математического доказательства, строить логически последовательные цепочки рассуждений	ПК-3.1 Способен к формальной записи рассуждения в терминах логики предикатов
	ПК-3.2 Владеет понятием о математически строгом доказательстве, способен различать строгие и нестрогие рассуждения
	ПК-3.3 Способен выявлять использованные при доказательстве предположения и предпосылки, в том числе неявные, и контролировать их корректность

2. Показатели оценивания компетенций

В результате изучения дисциплины «Алгебраическая геометрия» обучающийся должен:

знать:

Основные понятия классической алгебраической геометрии и, более детально, теории алгебраических кривых.

уметь:

Разбирать конкретные примеры и проводить необходимые вычисления.

владеть:

Свободно владеть техническим инструментарием, необходимым для самостоятельной работы с алгебраическими кривыми.

3. Перечень типовых (примерных) вопросов, заданий, тем для подготовки к текущему контролю

С целью контроля освоения обучающимися учебного материала проводится устный опрос в начале занятия по материалу предыдущего занятия.

Промежуточная аттестация по дисциплине «Алгебраическая геометрия» осуществляется в форме зачета и экзамена. Экзамен проводится в устной форме.

4. Перечень типовых (примерных) вопросов и тем для проведения промежуточной аттестации обучающихся

1. Аффинные и проективные многообразия: определения и примеры. Топология Зарисского и структурный пучок
2. Морфизм аффинных многообразий. Морфизмы проективных многообразий, трудности определения. Рациональные отображения и бирациональные изоморфизмы. Примеры
3. Проективные многообразия. Степень проективного многообразия, определение и теорема существования
4. Дивизоры, линейная эквивалентность, обратимые пучки. Группа Пикара. Группа Пикара проективного пространства. Касательное расслоение к гладкому многообразию. Векторные расслоения
5. Векторные расслоения и локально свободные пучки. Дифференциалы на гладком многообразии. Канонический класс
6. Рациональность коник и особых плоских кубик. Групповой закон на гладкой плоской кубике. Эллиптические кривые. Нерациональность эллиптических кривых
7. Индекс пересечения кривых на поверхности. Теорема Безу. Определение Римана рода алгебраической кривой. Арифметический род гладкой кривой
8. Группа Пикара кривой. Линейные системы на эллиптической кривой - подробный анализ. Теорема Римана-Роха: доказательство при помощи теории пучков и классическое геометрическое доказательство
9. Канонический класс и формула Гурвица. Алгебраическое доказательство. Вычеты на кривых и двойственность Серра, набросок доказательства
10. Многообразие Пикара (без доказательства). Морфизм из симметричной степени кривой
11. Каноническое вложение кривой. Гиперэллиптические кривые. Гиперэллиптичность кривых рода 2. Кривые рода 3 и 4, их канонические вложения
12. Дзета-функция кривой над конечным полем. Примеры. Гипотеза Вейля (без доказательства)
13. Классификация кривых родов 3 и 4. Кривые рода 5 и трисекции
14. Пространство модулей кривых. Свойства и существование грубого пространства модулей, идея конструкции. Грубое и тонкое пространство модулей
15. Векторные расслоения на кривых. Модули векторных расслоений, идея конструкции и пример

Пример экзаменационного билета:

- 1) Теорема Римана-Роха
- 2) Групповой закон на плоской гладкой кубике

Критерии оценивания

- оценка «отлично (10)» выставляется студенту, показавшему всесторонние, систематизированные, глубокие знания учебной программы дисциплины и умение уверенно применять их на практике при решении конкретных задач, свободное и правильное обоснование принятых решений;
- оценка «отлично (9)» выставляется студенту, показавшему всесторонние, систематизированные, глубокие знания учебной программы дисциплины и умение применять их на практике при решении конкретных задач, свободное и правильное обоснование принятых решений;
- оценка «отлично (8)» выставляется студенту, показавшему всесторонние систематизированные, глубокие знания учебной программы дисциплины и умение применять их на практике при решении конкретных задач, и правильное обоснование принятых решений;
- оценка «хорошо (7)» выставляется студенту, если он твердо знает материал, грамотно и по существу излагает его, умеет применять полученные знания на практике, но допускает в ответе или в решении задач некоторые неточности;

- оценка «хорошо (6)» выставляется студенту, если он знает материал, грамотно и по существу излагает его, умеет применять полученные знания на практике, но допускает в ответе или в решении задач некоторые неточности;
- оценка «хорошо (5)» выставляется студенту, если он знает материал, и по существу излагает его, умеет применять полученные знания на практике, но допускает в ответе или в решении задач некоторые неточности;
- оценка «удовлетворительно (4)» выставляется студенту, показавшему фрагментарный, разрозненный характер знаний, недостаточно правильные формулировки базовых понятий, нарушения логической последовательности в изложении программного материала, но при этом он владеет основными разделами учебной программы, необходимыми для дальнейшего обучения и может применять полученные знания по образцу в стандартной ситуации;
- оценка «удовлетворительно (3)» выставляется студенту, показавшему фрагментарный, разрозненный характер знаний, недостаточно правильные формулировки базовых понятий, нарушения логической последовательности в изложении программного материала, но при этом он владеет фрагментарно основными разделами учебной программы, необходимыми для дальнейшего обучения и может применять полученные знания по образцу в стандартной ситуации;
- оценка «неудовлетворительно (2)» выставляется студенту, который не знает большей части основного содержания учебной программы дисциплины, допускает грубые ошибки в формулировках основных понятий дисциплины и не умеет использовать полученные знания при решении типовых практических задач;
- оценка «неудовлетворительно (1)» выставляется студенту, который не знает формулировок основных понятий дисциплины.

5. Методические материалы, определяющие процедуры оценивания знаний, умений, навыков и (или) опыта деятельности

Зачет проводится по итогам текущей успеваемости и сдачи заданий, предусмотренных программой дисциплины.

При проведении устного экзамена обучающемуся предоставляется 40 минут на подготовку. Опрос обучающегося по билету на устном экзамене не может продолжаться более двух астрономических часов.

Во время проведения экзамена и зачета обучающимся запрещается пользоваться помощью других лиц и мобильными телефонами, разрешается пользоваться программой учебной дисциплины и справочной литературой по выбору экзаменатора.